Compléments de cours de probabilités

Module de préparation aux concours ENSA
DEUG BC $2^{\text{ième}}$ année

A. Lefranc
alefranc@snv.jussieu.fr

Table des matières

1 Rappels sur les ensembles 7

1.1 Quelques définitions 8

1.2 Opérations et propriétés 8

1.2.1 Intersection 8

1.2.2 Réunion 8

1.2.3 Commutativité et associativité 8

1.2.4 Complémentaire 9

1.2.5 Différence 9

1.2.6 Ensemble vide 9

1.2.7 Ensembles disjoints 9

1.2.8 Produit cartésien 9

1.2.9 Application 9

1.2.10 Ensemble fini 10

1.2.11 Ensemble dénombrable 10

2 Dénombrements 11

2.1 Cardinal 12

2.1.1 Produit cartésien 12

2.1.2 Complémentaire 12

2.1.3 Réunion 12

2.2 Analyse combinatoire 12

2.2.1 Rappels et définitions 12

2.2.2 Dispositions ordonnées 13

2.2.3 Dispositions non ordonnées 16

3 Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$ 19

3.1 Définitions 20

3.2 Moments 20

3.2.1 Définitions 20

3.2.2 Applications 21

3.3 Fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète 22

3.3.1 Définition 22

3.3.2 Propriétés 22

3.4 Inégalité de Bienaymé-Tchebicheff 23

3.5 Loi faible des grands nombres 23

3.6 Quelques lois discrètes usuelles 24

3.6.1 Loi uniforme discrète 24

3.6.2 Loi géométrique (ou loi de Pascal) 24

3.6.3 Loi hypergéométrique : tirages sans remises 25

3.7 Quelques lois continues usuelles 26

3.7.1 Loi uniforme continue 26

3.7.2 Loi exponentielle 27

3.8 Fonctions d'une variable aléatoire 28

3.8.1 Présentation 28

3.8.2 Cas des variables aléatoire discrètes 29

3.8.3 Cas des variables aléatoires continues 29

4 Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ 31

4.1 Vecteurs aléatoires discrets 32

4.1.1 Définition 32

4.1.2 Couple de variables aléatoire discrètes 32

4.1.3 Covariance 33

4.1.4 Matrice des variances-covariances 35

4.2 Couples de variables aléatoires continues 36

4.2.1 Définitions 36

4.2.2 Matrice des variances-covariances 37

4.3 Sommes de variables aléatoires 37

4.3.1 Cas des variables aléatoires discrètes 37

4.3.2 Cas des variables aléatoires continues 38

A Quelques formules utiles 39

B Quelques lois de probabilité usuelles 41

B.1 Lois discrètes 41

B.1.1 Loi uniforme discrète 41

B.1.2 Loi binomiale 41

B.1.3 Loi géométrique 42

B.1.4 Loi de Poisson 42

B.1.5 Loi hypergéométrique 42

B.2 Lois continues 42

B.2.1 Loi uniforme 43

B.2.2 Loi exponentielle 43

B.2.3 Loi normale 43
B.2.4 Loi du Chi-deux 43

Chapitre 1

Rappels sur les ensembles

Sommaire

1.1 Quelques définitions 8
1.2 Opérations et propriétés 8
1.2.1 Intersection 8
1.2.2 Réunion 8
1.2.3 Commutativité et associativité 8
1.2.4 Complémentaire 9
1.2.5 Différence 9
1.2.6 Ensemble vide 9
1.2.7 Ensembles disjoints 9
1.2.8 Produit cartésien 9
1.2.9 Application 9
1.2.10 Ensemble fini 10
1.2.11 Ensemble dénombrable 10

1.1 Quelques définitions

Considérons un ensemble E, c'est à dire une collection d'objets appelés les éléments de E. L'appartenance d'un élément x à E est notée $x \in E$. $x \notin E$ signifie au contraire que l'élément x n'appartient pas à E.
Une partie de E est aussi un ensemble appelé sous-ensemble de E. On utilise la notation $F \subset E$ lorsque F est un sous-ensemble de E. On dit aussi que F est inclus dans E.

Un certain nombre d'ensembles sont communément utilisés :

- $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers naturels ;
- $\mathbb{N}^*$, l'ensemble des entiers naturels non nuls ;
- $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs ;
- $\mathbb{Q}$, l'ensemble des rationnels ;
- $\mathbb{R}$, l'ensemble des réels.

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1.2 Opérations et propriétés

1.2.1 Intersection

$A \cap B$ est l'intersection des ensembles A et B, c'est à dire l'ensemble des points appartenant à la fois à A et à B.

1.2.2 Réunion

$A \cup B$ est la réunion des ensembles A et B, c'est à dire l'ensemble des points appartenant à au moins l'un des deux ensembles.

1.2.3 Commutativité et associativité

La réunion et l'intersection sont des opérations commutatives et associatives :
$A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ et $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

1.2.4 Complémentaire

Si $A \subset E$, son complémentaire dans E est l'ensemble des points de E n'appartenant pas à A. On le note A^c, $\overline{A}$, ou encore $\complement_E^A$.

1.2.5 Différence

Si A et B sont deux sous-ensembles de E, on note $A \setminus B$ la "différence" entre A et B, c'est à dire l'ensemble des points qui sont dans A mais pas dans B. On a donc $A \setminus B = A \cap B^c$.

1.2.6 Ensemble vide

C'est l'ensemble ne contenant aucun élément. On le note $\emptyset$.

1.2.7 Ensembles disjoints

Les ensembles A et B sont disjoints si $A \cap B = \emptyset$.

1.2.8 Produit cartésien

Soient E et F deux ensembles. On admet qu'il existe le produit cartésien $E \times F$ défini par :

$$z \in E \times F \Leftrightarrow \{\exists\ a \in E\ ;\ \exists\ b \in F,\ z = (a,b)\}$$

Par définition, $E \times F = \emptyset \Leftrightarrow E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$.

1.2.9 Application

On appelle application une fonction f associant à tout élément x de E un élément y de F. On dit aussi :

- f est une application de E dans F ;
- f prend ses valeurs dans F ;
- f est une application qui à x associe $f(x) = y$.

On note : $f\ : E \to F\ ;\ x \mapsto y = f(x)$.

Propriétés :

- f est *injective* si $\forall x \in E$ et $\forall x' \in E$, $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.
  Si f est injective, alors $card(E) \leq card(F)$.
- f est *surjective* si $\forall y \in F$, $\exists\, x \in E \;/\; f(x) = y$.
  Si f est surjective, alors $card(F) \leq card(E)$.
- f est *bijective* si elle est à la fois injective et surjective.
  Si f est bijective, alors $card(F) = card(E)$.

1.2.10 Ensemble fini

E est un ensemble fini s'il est vide ou s'il existe une bijection sur E de l'ensemble des n premiers entiers naturels. On a alors $card(E) = n$.

1.2.11 Ensemble dénombrable

E est un ensemble dénombrable s'il est vide ou s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur E.
$card(\mathbb{N}) = \aleph_0$ ($\aleph_0$ - aleph zéro - est le plus petit cardinal infini).

Chapitre 2

Dénombrements

Sommaire

2.1 Cardinal 12
2.1.1 Produit cartésien 12
2.1.2 Complémentaire 12
2.1.3 Réunion 12
2.2 Analyse combinatoire 12
2.2.1 Rappels et définitions 12
2.2.2 Dispositions ordonnées 13
2.2.3 Dispositions non ordonnées 16

2.1 Cardinal

2.1.1 Produit cartésien

Soient A et B deux ensembles finis. Alors leur produit cartésien est fini et son cardinal est $card(A \times B) = card(A)\ card(B)$.

On peut généraliser au produit cartésien de n ensembles finis :

$$card(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = \prod_{i=1}^{n} card(A_i)$$

2.1.2 Complémentaire

Soit $A \subset E$, alors $card(\complement_E^A) = card(E) - card(A)$.

2.1.3 Réunion

Soient A et B deux ensembles finis

- Si $A \cap B = \emptyset$, $card(A \cup B) = card(A) + card(B)$.
- Si $A \cap B \neq \emptyset$, $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$.

On peut généraliser à n ensembles : *Formule du crible de Poincaré*

$$card(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} card(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

2.2 Analyse combinatoire

2.2.1 Rappels et définitions

Les éléments peuvent être *discernables* 2 à 2 ou *indiscernables*.

Une *disposition* est une suite d'éléments. Elle peut être :

- *sans répétition*, chaque élément figure au plus une fois dans la disposition ;
- *avec répétition*, un élément peut figurer plusieurs fois dans la disposition ;

- *ordonnée*, chaque élément est caractérisé non seuleument par le nombre de fois où il apparaît dans la disposition, mais aussi par sa place dans la disposition ;
- *non ordonnée*, si l'ordre des éléments ne compte pas.

Un *multiplet* correspond à la situation d'un produit cartésien. Soit un groupe de S ensembles A, $B, \ldots, S$ contenant respectivement α, $\beta, \ldots, \sigma$ éléments :

$$\{\underbrace{(a_1,\, a_2, \ldots, a_\alpha)}_{A},\ \underbrace{(b_1,\, b_2, \ldots, b_\beta)}_{B}, \ldots,\ \underbrace{(s_1,\, s_2, \ldots,\, s_\sigma)}_{S}\}$$

Un multiplet de S éléments (un *S-uplet*) est une suite d'un élément de A, un élément de B, ..., un élément de S.

Il est alors clair que :

$$\begin{aligned} card(S - uplet) &= card(A \times B \times \cdots \times S) \\ &= card(A)\ card(B)\ \ldots\ card(S) \\ &= \alpha\ \beta\ \ldots\ \sigma \end{aligned}$$

De ceci découle le *principe des tiroirs* : si une opération O peut se décomposer en S opérations successives telles que la première ait α possibilités, la deuxième β possibilités, ..., la $S^{\text{ième}}$ σ possibilités, alors le nombre de possibilités pour l'opération O sera $\alpha\ \beta\ \ldots\ \sigma$.

2.2.2 Dispositions ordonnées

Arrangements avec répétition

Il s'agit d'une disposition *ordonnée* de *p éléments pris parmi n*, *discernables*, *avec répétition éventuelle*. Pour chacun des p éléments, il y a n possibilités. On déduit donc :

$$\boxed{\forall (p,n) \in \mathbb{N}^2,\ \mathcal{A}_n^p = \underbrace{n\ n\ \ldots\ n}_{p \text{ fois}} = n^p}$$

Arrangements sans répétitions

Il s'agit d'une disposition *ordonnée* de *p éléments pris parmi n*, *discernables*, *sans répétition*.

On a donc :

- n possibilités pour le 1^{er} élément ;
- $(n-1)$ possibilités pour le 2^{eme} élément ;

  $\vdots$
- $(n-i+1)$ possibilités pour le i^{eme} élément ;

  $\vdots$
- $(n-p+1)$ possibilités pour le p^{ieme} élément.

Au total, cela fait donc $n\ (n+1)\ \ldots\ (n-p+1)$ possibilités.

$$\boxed{\forall (p,\, n) \in \mathbb{N}^2,\, p \leq n,\, A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Propriété :

$$A_n^p = A_{n-1}^p + p\ A_{n-1}^{p-1}$$

Démonstration (deux méthodes) :

1. Parmi les A_n^p arrangements, il y a ceux qui contiennent un élément particulier a et ceux qui ne le contiennent pas.
   - Pour ceux qui ne le contiennent pas, il y a A_{n-1}^p possibilités : les p éléments de l'arrangement sont pris parmi les $(n-1)$ éléments autres que a ;
   - Pour ceux qui le contiennent, en plus de a, ils contiennent $(p-1)$ autre éléments, qui sont pris parmi les $(n-1)$ autres que a. Il y a A_{n-1}^{p-1} arrangements de $(p-1)$ éléments ne contenant pas a. Pour chacun de ces arrangements, il y a ensuite p positions possibles pour intercaller a. Donc il y a au total $p\ A_{n-1}^{p-1}$ arrangements de p éléments contenant a.

   Donc il y a au total $A_{n-1}^p + p\ A_{n-1}^{p-1}$ arrangements de p éléments pris parmi n.
2.

$$\begin{aligned}
A_n^p &= \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{(n-p+p)(n-1)!}{(n-p)!} \\
&= \frac{(n-p)(n-1)!}{(n-p)!} + p\frac{(n-1)!}{(n-p)!} = \frac{(n-1)!}{(n-1-p)!} + p\frac{(n-1)!}{((n-1)-(p-1))!} \\
&= A_{n-1}^p + p\ A_{n-1}^{p-1}
\end{aligned}$$

Permutations sans répétitions

Il s'agit d'une disposition *ordonnée* des n éléments de l'ensemble, *sans répétition.*

On en déduit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!}$$

Permutations avec répétition

Il s'agit d'une disposition *ordonnée* de n éléments *partiellement discernables.* Parmi les n éléments, on trouve α éléments a, β éléments b, …, σ éléments s :

$$\{(\underbrace{a,\ a,\ldots,\ a}_{\alpha \text{ éléments}}),\ (\underbrace{b,\ b,\ldots,\ b}_{\beta \text{ éléments}}),\ldots,(\underbrace{s,\ s,\ldots,\ s}_{\sigma \text{ éléments}})\} \text{ avec } n = \alpha + \beta + \cdots + \sigma$$

Si tous les éléments étaient discernables, on aurait $n!$ permutations. Ici toutes permutations des α éléments a, des β éléments b, …, des σ éléments s correspondent à la même permutation avec répétition.

On en déduit donc le nombre de permutations avec répétition :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n = \frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\sigma!}}$$

Application :

$$(a+b+\cdots+s)^n = \underbrace{(a+b+\cdots+s)\ (a+b+\cdots+s)\ \ldots\ (a+b+\cdots+s)}_{n \text{ fois}}$$

Le développement est une somme de termes dont chacun est un produit de n éléments comportant α a, β b, …, σ s tels que $n = \alpha + \beta + \cdots + \sigma$.

Ainsi :

$$(a+b+\cdots+s)^n = \sum_{\alpha+\beta+\cdots+\sigma=n} \frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\sigma!}\ a^\alpha b^\beta \ldots s^\sigma$$

On peut en particulier en déduire le développement d'un binôme :

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!}\ a^r\ b^{n-r}$$

2.2.3 Dispositions non ordonnées

Combinaisons sans répétition

Il s'agit de dispositions *non ordonnées* de p éléments *discernables* pris parmis n, *sans répétition.*
Pour une disposition ordonnée de p éléments pris parmi n sans répétition, il y a A_n^p possibilités. Parmi celles-ci, $p!$ permutations correspondent à la même disposition non-ordonnée. On en déduit donc :

$$\boxed{\forall (p,\, n) \in \mathbb{N}^2,\, p \leq n,\, C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

Propriétés :

$$\begin{aligned} C_n^p &= \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^{n-p} \\ C_n^p &= C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} \end{aligned}$$

Demonstration :
Parmi les C_n^p combinaisons de p éléments pris parmi n, il y en a qui contiennent un élément particulier a, et d'autres qui ne le contiennent pas.

- Nombre de combinaisons qui contiennent a : elles contiennent a et $(p-1)$ éléments autres que a, pris parmi les $(n-1)$ qui ne sont pas a. Il y en a donc C_{n-1}^{p-1}.
- Nombre de combinaisons qui ne contiennent pas a : elles contiennent p éléments pris parmi les $(n-1)$ éléments autres que a. Il y en a donc C_{n-1}^p

Donc $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

Triangle de Pascal :

p n	0	1		2	3	…	(p-1)		p
1	1	1							
2	1	2	+	1					
				$\Vert$					
3	1	3		3	1				
⋮									
(n-1)			…				C_{n-1}^{p-1}	+	C_{n-1}^p
									$\Vert$
n			…						C_n^p

Formule du binôme de Newton :

On retrouve ainsi la formule du développement d'un binôme (voir 2.2.2 page 15) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\ a^k\ b^{(n-k)}$$

Tout terme en $a^k b^{(n-k)}$ est répété autant de fois qu'on peut prendre k éléments a et $(n-k)$ éléments b dans un rang différent.

On en déduit aisément :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} C_n^k &= 2^n \\ \sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p &= (1-1)^n = 0\end{aligned}$$

Combinaisons avec répétitions

Il s'agit de dispositions *non ordonnées* de p éléments pris parmi n, *discernables*, *avec répétition* éventuellement. Dans ce cas, on n'a donc pas obligatoirement $p \leq n$.

Considérons que l'on introduise des séparateurs entre n éléments discernables :

$$\underbrace{a\ a||c\ c\ c|d}_{p \text{ éléments pris parmi } n \text{ discernables avec répétition}}$$

On a alors $n-1$ séparateurs. Toute combinaison revient alors à placer les $n-1$ séparateurs et les p éléments dans un ordre donné.

Toute combinaison avec répétition est donc une permutation avec répétition des $n-1$ séparateurs et des p éléments. Posons $m = (n-1)+p$.

$$\boxed{\forall (p,\, n) \in \mathbb{N}^2,\ K_n^p = \mathcal{P}_m = \frac{m!}{p!(n-1)!} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n+p-1-p)!} = C_{n+p-1}^p}$$

Chapitre 3

Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$

Sommaire

3.1 Définitions **20**
3.2 Moments **20**
3.2.1 Définitions 20
3.2.2 Applications 21
3.3 Fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète **22**
3.3.1 Définition 22
3.3.2 Propriétés 22
3.4 Inégalité de Bienaymé-Tchebicheff **23**
3.5 Loi faible des grands nombres **23**
3.6 Quelques lois discrètes usuelles **24**
3.6.1 Loi uniforme discrète 24
3.6.2 Loi géométrique (ou loi de Pascal) 24
3.6.3 Loi hypergéométrique : tirages sans remises 25
3.7 Quelques lois continues usuelles **26**
3.7.1 Loi uniforme continue 26
3.7.2 Loi exponentielle 27
3.8 Fonctions d'une variable aléatoire **28**
3.8.1 Présentation 28
3.8.2 Cas des variables aléatoire discrètes 29
3.8.3 Cas des variables aléatoires continues 29

3.1 Définitions

L'espace d'états est l'ensemble, habituellement noté Ω, de tous les résultats possibles de l'expérience aléatoire que l'on réalise.

Un *évènement* est une propriété dont on peut dire si elle est vraie ou fausse après avoir réalisé l'expérience. Un évènement est donc une partie de Ω. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble de tous les évènements de Ω. Le plus souvent, on a $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

A chaque évènement A, on associe un nombre, noté $P(A)$, et appelé "probabilité de A". Les probabilités vérifient les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}&0 \leq P(A) \leq 1\\&P(\Omega) = 1\\&\text{Si } A \cap B = \emptyset,\ P(A \cup B) = P(A) + P(B)\end{aligned}$$

Un modèle probabiliste est donc un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ constitué de l'espace Ω, de l'ensemble des évènements $\mathcal{A}$, et de la famille des $P(A)$ pour $A \in \mathcal{A}$.

Soit E un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle *variable aléatoire* sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans E toute application X de Ω dans E.

Notations :

Soit $A' \subset E$, $\{X \in A'\} = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in A'\}$. Cela signifie aussi que $X^{-1}(A')$ est un évènement de Ω.

La probabilité de cet évènement est notée $P(X \in A')$.

Soit P_X l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans [0,1] définie par $P_X(A') = P(X \in A')$.

P_X est une loi de probabilité sur E, que l'on apelle loi de la variable aléatoire X.

3.2 Moments

3.2.1 Définitions

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ un entier positif, et soit X une variable aléatoire telle que X^k posède une espérance[1]. Alors $E(X^k)$ s'appelle le *moment* d'ordre k de X. On le note m_k.

1. Voir définition dans le cours de bio-statistiques du DEUG

Le nombre $E[(X-E(X))^k]$ est le *moment centré* d'ordre k de X. On le note μ_k.

3.2.2 Applications

Cas des variables aléatoires discrètes

Soit X une variable aléatoire *réelle discrète*, et soit $\{x_i\ ;\ i = 1,\ 2, \dots\}$ l'ensemble des valeurs prises par X et $\{p_i\ ;\ i = 1,\ 2, \dots\}$ les probabilités correspondantes.

Le moment d'ordre k a pour expression, sous réserve d'existence :

$$m_k = \sum_i x_i^k\ p_i$$

Le moment centré d'ordre k a pour expression, sous réserve d'existence :

$$\mu_k = \sum_i (x_i - E(X))^k\ p_i$$

Variables aléatoires continues

Soit X une variable aléatoire *réelle continue* de densité[2] f. Le moment d'ordre k est défini, sous réserve d'existence, par :

$$m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k\ f(x)\ dx$$

Le moment centré d'ordre k a pour expression, sous réserve d'existence :

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^k\ f(x)\ dx$$

Propriétés

Si X admet un moment d'ordre k, alors $\forall r \in \mathbb{N}^*$, $r \leq k$, elle admet un moment d'ordre r.

2. Voir définition dans le cours de bio-statistiques du DEUG

L'*espérance*, notée aussi m, qui est le moment d'ordre 1, vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= a\ E(X)+b \\ E(X+Y) &= E(X)+E(Y) \end{aligned}$$

La *variance* $V(X)$, notée aussi σ^2, est le moment centré d'ordre 2.

$$\begin{aligned} V(X) &= \mu_2 = \sigma^2 = E\left[(X-E(X))^2\right] \\ &= E\left[X^2 - 2\ X\ E(X) + (E(X))^2\right] \\ &= E(X^2) - 2\ E(X)\ E(X) + (E(X))^2 \\ &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= {m_2}^1 - {m_1}^2 \end{aligned}$$

Elle vérifie la propriété suivante :

$$V(aX+b) = a^2\ V(X)$$

3.3 Fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète

3.3.1 Définition

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont la loi est caractérisée par les nombres $p_n = P(X=n)$. La *fonction génératrice* de X est la fonction $G_X\ : [0,1] \to [0,1]$ définie par :

$$\boxed{\forall s \in [0,1],\ G_X(s) = E(s^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} s^n\ P(X=n)}$$

$G_X(s)$ est *monotone, croissante, bornée, continue* et *indéfiniment dérivable*, telle que $G_X(s) \in [0,1]$, $G_X(0) = 0$, et $G_X(1) = 1$.

3.3.2 Propriétés

La fonction génératrice caractérise la loi de X.
Plus précisément :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}.$$

où $G_X^{(n)}(0)$ désigne la dérivée n-ième de G_X en 0.

D'autre part :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\ P(X=k) = G'_X(1)$$

3.4 Inégalité de Bienaymé-Tchebicheff

Soit X une variable aléatoire, sous réserve que X ait une variance, on a :

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}^{*+},\ P\left(|X - E(X)| \geq a\right)\ \leq\ \frac{V(X)}{a^2}}$$

Démonstration dans le cas des variables aléatoires discrètes :

Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs $\{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots\}$

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(|X - E(X)|^2) = \sum_i P(X = x_i)\ |x_i - E(X)|^2 \\
&\geq \sum_{i/|x_i - E(X)|^2 \geq a^2} P(X = x_i)\ |x_i - E(X)|^2 \\
&\geq \sum_{i/|x_i - E(X)|^2 \geq a^2} P(X = x_i)\ a^2 \\
&\geq a^2 \sum_{i/|x_i - E(X)|^2 \geq a^2} P(X = x_i) \\
&\geq a^2\ P\left(|X - E(X)|^2 \geq a^2\right)
\end{aligned}$$

Donc :

$$P\left(|X - E(X)|^2 \geq a^2\right)\ \leq\ \frac{V(X)}{a^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad P(|X - E(X)| \geq a)\ \leq\ \frac{V(X)}{a^2}$$

3.5 Loi faible des grands nombres

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ une suite de variables aléatoires *indépendantes*[3] et *identiquement distribuées*. On suppose que X_1 possède une variance. Alors, on a :

$$\boxed{\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{*+},\ \lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - E(X_1))\right| \geq \epsilon\right) = 0}$$

3. Voir définition dans le cours de bio-statistiques du DEUG

3.6 Quelques lois discrètes usuelles

3.6.1 Loi uniforme discrète

X suit une loi uniforme discrète sur $[1,\, n]$ si :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ k \leq n,\ P(X = k) = \frac{1}{n}$$

On note $X = \mathcal{U}([1,\, n])$.

Espérance

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k\ k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$$

Variance

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} p_k\ k^2 - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\ k^2 - \frac{(n+1)^2}{4} \\
&= \left(\frac{1}{n}\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) - \frac{(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{n^2-1}{12}
\end{aligned}$$

3.6.2 Loi géométrique (ou loi de Pascal)

X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,\, 1[$ lorsqu'elle prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ avec la probabilité :

Pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1}\ p$$

La variable aléatoire correspond au rang du premier succès rencontré au cours d'une suite d'épreuves de Bernouilli indépendantes ayant chacune la même probabilité de succès p (et d'échec, $q = 1 - p$). On note $X = \mathcal{G}(p)$.

Espérance

$$E(X) = \sum_{k \geq 1} k\ (1-p)^{k-1}\ p = p \sum_{k \geq 1} k\ (1-p)^{k-1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

Variance

$$V(X) = \frac{q}{p^2}$$

3.6.3 Loi hypergéométrique : tirages sans remises

Une urne contient n boules, dont S vertes. On note $p = \frac{S}{N}$ la proportion de boules vertes et $q = 1 - p = \frac{N-S}{N}$.
On prend au hasard successivement n boules dans l'urne, sans les remettre. La variable aléatoire X égale au nombre de boules vertes parmi ces n boules suit une loi hypergéométrique. Pour k entier entre 0 et n :

$$P(X = k) = \frac{C_{Np}^{k}\, C_{Nq}^{n-k}}{C_N^n}$$

On note $X = \mathcal{H}(N, n, p)$

Espérance

$$E(X) = n\,p$$

Variance

$$V(X) = n\,p\,q\,\frac{N-n}{N-1}.$$

3.7 Quelques lois continues usuelles

3.7.1 Loi uniforme continue

X est une variable continue uniforme sur $[a,\, b]$ si sa densité f vérifie :

$$\begin{cases} \forall x \notin [a,\, b], & f(x) = 0 \\ \forall x \in [a,\, b], & f(x) = \frac{1}{b-a} \end{cases}$$

On note $X = \mathsf{U}([a,\, b])$.

Fonction de répartition

On peut aisément trouver la fonction de répartition[4] F :

$$\begin{cases} \forall x \in [a,\, b], & F(x) = \int_a^x \frac{dt}{b-a} = \frac{x-a}{b-a} \\ \forall x < a, & F(x) = 0 \\ \forall x > b, & F(x) = 1 \end{cases}$$

Calcul des moments

Calculons le moment d'ordre k, m_k :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^*,\, m_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^k\ f(x)\ dx = \int_a^b \frac{x^k}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_a^b \\ &= \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(k+1)(b-a)} \end{aligned}$$

On en déduit alors les moments d'ordre 1 et 2 :

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2} \\ m_2 &= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} E(X) &= m_1 = \frac{a+b}{2} \\ V(X) &= m_2 - {m_1}^2 = \frac{(a-b)^2}{12} \end{aligned}$$

4. Voir définition dans le cours de bio-statistiques du DEUG

3.7.2 Loi exponentielle

X est une variable aléatoire exponentielle si sa densité f vérifie :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^+, & f(x) = \lambda \exp^{-\lambda x} \\ \forall x \in \mathbb{R}^{*-}, & f(x) = 0 \end{cases}$$

La loi exponentielle correspond à la durée de vie si le taux de mortalité est constant.

Fonction de répartition

On trouve là encore aisément la fonction de répartition F :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^+, & F(x) = \int_0^x \lambda \exp^{-\lambda t}\, dt = \left[-\exp^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - \exp^{-\lambda x} \\ \forall x \in \mathbb{R}^{*-}, & F(x) = 0 \end{cases}$$

Calcul des moments

Le moment d'ordre k, m_k a pour expression :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ m_k = \int_0^{+\infty} \lambda \exp^{-\lambda x}\ x^k\, dx$$

m_k est convergent. En effet :

$$x^k\ \exp^{-\lambda x} = \frac{x^k}{\exp^{\lambda x}}$$

Or,

$$exp^{\lambda x} = 1 + \frac{\lambda x}{1!} + \cdots + \frac{(\lambda x)^{k+2}}{(k+2)!} + \ldots$$

Donc

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^*,\ exp^{\lambda x} &\geq \frac{(\lambda x)^{k+2}}{(k+2)!} \\ \frac{1}{exp^{\lambda x}} &\leq \frac{(k+2)!}{(\lambda x)^{k+2}} \\ \frac{x^k}{exp^{\lambda x}} &\leq \frac{(k+2)!}{\lambda^{k+2}\, x^2} \\ \int_1^{+\infty} \lambda \exp^{-\lambda x}\ x^k\, dx &\leq \frac{(k+2)!}{\lambda^{k+2}} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \end{aligned}$$

L'intégrale de droite est convergente, donc m_k est convergent.

Calcul de m_k :

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}^*,\ m_k &= \int_0^{+\infty} \lambda \exp^{-\lambda x}\ x^k\, dx \\
&= \Big[-x^k \exp^{-\lambda x}\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} k\, x^{k-1} \exp^{-\lambda x}\, dx \\
&= \frac{k}{\lambda}\, m_{k-1}
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
m_1 &= \int_0^{+\infty} k\ \exp^{-\lambda x}\ x\, dx \\
&= \Big[-x\ \exp^{-\lambda x}\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \exp^{-\lambda x}\ dx \\
&= \left[-\frac{1}{\lambda} \exp^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
m_1 &= \frac{1}{\lambda} \\
\vdots &= \vdots \\
m_{k-1} &= \frac{k-1}{\lambda}\, m_{k-2} \\
m_k &= \frac{k}{\lambda}\, m_{k-1}
\end{aligned}$$

En multipliant terme à terme, on obtient :

$$m_k = \frac{k!}{\lambda^k}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
E(X) &= m_1 = \frac{1}{\lambda} \\
V(X) &= m_2 - {m_1}^2 = \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

3.8 Fonctions d'une variable aléatoire

3.8.1 Présentation

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et l'application $\varphi\ :\ D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que $X(\Omega) \subset D$. Alors $Y = \varphi(X)$ est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

3.8.2 Cas des variables aléatoire discrètes

Dans le cas des variables aléatoires discrètes, si X prend l'ensemble des valeurs $\{x_1, \ldots, x_k, \ldots\}$ et Y l'ensemble des valeurs $\{y_1, \ldots, y_j, \ldots\}$,

$$\forall y_j \in (\varphi \circ X)(\Omega),\ P(Y = y_j) = \sum_{x_k / \varphi(x_k) = y_j} P(X = x_k)$$

Y est donc elle-même une variable aléatoire discrète.

L'espérance de Y vaut alors, sous réserve d'existence :

$$E(Y) = \sum_k \varphi(x_k) P(X = x_k)$$

3.8.3 Cas des variables aléatoires continues

On peut distinguer alors deux cas, selon que φ est une bijection, ou que φ n'est pas une bijection.

Si φ est une bijection

Alors, φ^{-1} existe et est unique. Si φ' existe et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors $Y = \varphi(X)$ est une variable continue et sa densité de probabilité g vaut :

$$g(y) = \frac{f(x)}{|\varphi'(x)|} = \frac{f\left(\varphi^{-1}(y)\right)}{|\varphi'\left(\varphi^{-1}(y)\right)|} \text{ sauf pour les valeurs où } \varphi' \text{ s'annule}$$

Si φ est dérivable, mais ne possède pas une unique fonction réciproque

Alors, il faut considérer séparément chacun des intervalles où φ est une bijection puis effectuer une sommation afin de calculer la densité de Y.

Exemple

Soit $X = \mathcal{N}(0, 1)$ et $Y = X^2$. Ici, on a $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2$. φ est dérivable, mais ne possède pas une unique fonction réciproque. Par contre, φ est une bijection de $]-\infty, 0[$ sur $]0, +\infty[$, et φ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.

Y prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
On a, $\forall y \geq 0$, $\{Y = y\} \Leftrightarrow \{X = \sqrt{y}$ ou $X = -\sqrt{y}\}$

La densité f de X vaut :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{x^2}{2}}$$

On note que f est paire, c'est à dire que $f(x) = f(-x)$.

Donc, pour $x \in]0, +\infty[$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{y}{2}} \qquad \text{et} \qquad \varphi'(x) = 2x = 2\sqrt{y}$$

et de même pour $x \in]-\infty, 0[$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{y}{2}} \qquad \text{et} \qquad \varphi'(x) = 2x = -2\sqrt{y}$$

On en déduit donc la densité g de Y :

$$\begin{array}{lcl} \forall y \in \mathbb{R}^{*+},\ \ g(y) & = & \frac{f(x)}{|2\sqrt{y}|} + \frac{f(x)}{|-2\sqrt{y}|} = \frac{2f(x)}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \exp^{-\frac{y}{2}} \\ \forall y \in \mathbb{R}^{-},\ \ g(y) & = & 0 \end{array}$$

Y suit donc une loi χ^2_1.

Chapitre 4

Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

Sommaire

4.1 Vecteurs aléatoires discrets 32
4.1.1 Définition 32
4.1.2 Couple de variables aléatoire discrètes 32
4.1.3 Covariance 33
4.1.4 Matrice des variances-covariances 35
4.2 Couples de variables aléatoires continues 36
4.2.1 Définitions 36
4.2.2 Matrice des variances-covariances 37
4.3 Sommes de variables aléatoires 37
4.3.1 Cas des variables aléatoires discrètes 37
4.3.2 Cas des variables aléatoires continues 38

4.1 Vecteurs aléatoires discrets

4.1.1 Définition

$(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_n)$ est un vecteur aléatoire discret si $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $i \leq n$, $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire discrète.

Définir la loi d'un vecteur aléatoire discret $(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_n)$, c'est donner :

1. Les ensembles $X_1(\Omega), \ldots, X_i(\Omega), \ldots, X_n(\Omega)$;
2. $\forall (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_i(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$, la probabilité $P(X_1 = x_1 \cap \cdots \cap X_i = x_i \cap \cdots \cap X_n = x_n)$.

4.1.2 Couple de variables aléatoire discrètes

On se restreint ici au cas d'un couple de variables aléatoires.

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes telles que $X(\Omega) = \{x_i /\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j /\ j \in J\}$, avec I et J deux intervalles de $\mathbb{N}$. Le couple (X, Y) prend ses valeurs dans $X(\Omega) \times Y(\Omega) = \{(x_i, y_j) /\ (i, j) \in I \times J\}$.

Loi conjointe de X et Y

On appelle loi conjointe de X et Y la loi du vecteur aléatoire formé par X et Y, c'est à dire :

$$\forall (i, j) \in I \times J,\ p_{ij} = P(X = x_i \cap Y = y_j)$$

Lois marginales de X et de Y

Les lois marginales correspondent aux lois de chacune des deux variables. Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall i \in I,\ P(X = x_i) &= \sum_{y_j \in Y(\Omega)} P(X = x_i \cap Y = y_j) = \sum_{j \in J} p_{ij} = p_{i.} \\ \forall j \in J,\ P(Y = y_j) &= \sum_{x_i \in X(\Omega)} P(X = x_i \cap Y = y_j) = \sum_{i \in I} p_{ij} = p_{.j} \end{aligned}$$

Lois conditionelles de X sachant Y et de Y sachant X

$$\begin{aligned} \forall (i,\, j) \in I \times J,\, P(X = x_i / Y = y_j) &= \frac{P(X = x_i \cap Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{.j}} \\ \forall (i,\, j) \in I \times J,\, P(Y = y_j / X = x_i) &= \frac{P(X = x_i \cap Y = y_j)}{P(x = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i.}} \end{aligned}$$

L'utilisation d'un tableau peut permettre de donner de façon synthétique les valeurs de ces différentes probabilités.

Y X	y_1	$\cdots$	y_j	$\cdots$	
x_1	p_{11}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1.}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		
x_i	p_{i1}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i.}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		
	$p_{.1}$		$p_{.j}$		

Variables aléatoires indépendantes

Il y a *indépendance* entre X et Y si et seulement si :

$$\boxed{\forall (i,\, j) \in I \times J,\, p_{ij} = p_{i.}\, p_{.j}}$$

Si X et Y sont indépendantes, alors :

$$\begin{aligned} E(XY) &= E(X)\, E(Y) \\ V(X+Y) &= V(X) + V(Y) \end{aligned}$$

4.1.3 Covariance

Considérons deux variables aléatoires X et Y ayant des moments d'ordre 2. La *covariance* de X et Y est définie par :

$$\boxed{cov(X, Y) = E\left\{[X - E(X)]\,[Y - E(Y)]\right\}}$$

Propriétés

Soient X et Y deux variables aléatoires possédant des moments d'ordre 2.

-
$$\boxed{cov(X, Y) = E(XY) - E(X)\ E(Y)}$$

  En effet :
$$\begin{aligned} E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} &= E[XY - E(X)\ Y - E(Y)\ X + E(X)\ E(Y)] \\ &= E(XY) - E(X)\ E(Y) \end{aligned}$$

- Il en découle que :
$$\begin{aligned} cov(X, Y) &= cov(Y, X) \\ cov(X, X) &= V(X) \\ cov(aX + b, cY + d) &= a\,c\ cov(X, Y) \\ V(X + Y) &= V(X) + V(Y) + 2cov(X, Y) \end{aligned}$$

- Si X et Y sont indépendantes, alors $cov(X, Y) = 0$.
  Attention : La réciproque n'est pas vraie !
- *Inégalité de Cauchy-Schwartz* :
  Si X et Y sont deux variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2, alors :
$$E(|XY|) \leq \sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}$$

  Démonstration :
  Démontrons tout d'abord l'existence de $E(|XY|)$. Autrement dit, $|XY|$ admet t'elle un moment d'ordre 1?
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(|X| - |Y|\right)^2 \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{|X|^2}{2} - |X||Y| + \frac{|Y|^2}{2} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{|X|^2}{2} + \frac{|Y|^2}{2} \geq |X||Y| \\ &\Leftrightarrow \frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{2} \geq |XY| \end{aligned}$$

  Or par hypothèse, X et Y admettent des moments d'ordre 2, donc $|XY|$ admet un moment d'ordre 1.
  Ensuite,
$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{R},\ (|X| + a|Y|)^2 \geq 0 &\Rightarrow E\left[(|X| + a|Y|)^2\right] \geq 0 \\ &\Leftrightarrow E(X^2) + 2\ a\ E(|XY|) + a^2\ E(Y^2) \geq 0 \end{aligned}$$

On a donc un polynôme du second degré en a. Son discriminant vaut $\Delta = 4(E(|XY|))^2 - 4\left(E(X^2)E(Y^2)\right)$. Or ce polynôme est toujours positif ou nul. Donc on a $\Delta \leq 0$. Donc :

$$\begin{array}{lrcl} & 4\left[(E(|XY|))^2 - E(X^2)E(Y^2)\right] & \leq & 0 \\ \Leftrightarrow & (E(|XY|))^2 - E(X^2)E(Y^2) & \leq & 0 \\ \Leftrightarrow & E(|XY|) & \leq & \sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)} \end{array}$$

– Si X et Y admettent des moments d'ordre 2, alors :

$$|cov(X,Y)| \leq \sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}$$

Démonstration :
On a pour toute variable aléatoire Q, $|E(Q)| \leq E(|Q|)$.
Donc

$$|cov(X,Y)| \leq E(|(X - E(X))(Y - E(Y))|)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz (voir 4.1.3 page précédente), on obtient donc :

$$\begin{array}{rcl} |cov(X,Y)| & \leq & \sqrt{E\left[(X - E(X))^2\right]}\sqrt{E\left[(Y - E(Y))^2\right]} \text{ donc} \\ |cov(X,Y)| & \leq & \sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)} \end{array}$$

Coefficient de corrélation

On définit le coefficient de corrélation ρ, si X et Y admettent des moments d'ordre 2 :

$$\boxed{\rho = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}}$$

4.1.4 Matrice des variances-covariances

Soir V un vecteur aléatoire formé de variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2 :

$$V = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_i \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

et

$$E(V) = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ \vdots \\ E(X_i) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{pmatrix}$$

On peut alors définir Σ, la *matrice des variances-covariance* par :

$$\boxed{\Sigma = E\left[(V - E(V))(V - E(V))^\top\right]}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} E[(X_1 - E(X_1))(X_1 - E(X_1))] & \dots & E[(X_1 - E(X_1))(X_i - E(X_i))] & \dots & E[(X_1 - E(X_1))(X_n - E(X_n))] \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ E[(X_i - E(X_i))(X_1 - E(X_1))] & & E[(X_i - E(X_i))(X_i - E(X_i))] & & E[(X_i - E(X_i))(X_n - E(X_n))] \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ E[(X_n - E(X_n))(X_1 - E(X_1))] & & E[(X_n - E(X_n))(X_i - E(X_i))] & & E[(X_n - E(X_n))(X_n - E(X_n))] \end{pmatrix}$$

Σ est donc une matrice carrée, symétrique par rapport à sa diagonale principale. La diagonale principale contient les éléments $V(X_i)$, tandis que les éléments extradiagonaux sont les covariances. On peut démontrer selon le même principe que pour la somme de deux variables aléatoires (voir 4.1.3 page 34) :

$$V(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} cov(X_i,\, X_j)$$

4.2 Couples de variables aléatoires continues

4.2.1 Définitions

$f\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une densité de probabilité si :

- $f(x,\, y)$ est à valeurs positives ;
- $\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,\, y)\ dx\ dy$ est définie et vaut 1.

Si le couple $(X,\, Y)$ admet la fonction $f(x,\, y)$ comme densité de probabilité, alors la fonction de répartition vaut :

$$F(x,\, y) = P(X \leq x \cap Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(t,\, u)\ dt\ du$$

On en déduit aisément

$$f(x,\, y) = \frac{\partial^2 F(x,\, y)}{\partial x\ \partial y}.$$

Densités marginales

Les densités marginales g de X et h de Y sont :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\, y)\; dy \qquad \text{et} \qquad h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\, y)\; dx$$

Densités conditionnelles

Les densités conditionnelles de X sachant $(Y = y)$, $g_{Y=y}$, et de Y sachant $(X = x)$, $h_{X=x}$, sont :

$$g_{Y=y} = \frac{f(x,\, y)}{h(y)} \qquad \text{et} \qquad h_{X=x} = \frac{f(x,\, y)}{g(x)}$$

Indépendance

X et Y sont indépendantes si et seuleument si :

$$\boxed{\forall (x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\; f(x,\, y) = g(x)\; h(y)}$$

4.2.2 Matrice des variances-covariances

La définition et les propriétés énoncées pour les covariances des variables discrètes (voir 4.1.3 page 33) restent valables. On peut généraliser tout ce qui a été vu pour les variables continues au cas de plusieurs variables. On définit de la même façon que pour les variables aléatoires discrètes la matrice des variances-covariances (voir 4.1.4 page 35).

4.3 Sommes de variables aléatoires

Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires, alors leur somme $Z = X + Y$ est aussi une variable aléatoire.

4.3.1 Cas des variables aléatoires discrètes

Si X et Y sont des variables aléatoires discrètes, alors $Z = X + Y$ est aussi une variable aléatoire discrète.

Dans le cas général, on a :

$$\begin{aligned}\forall z \in Z(\Omega),\ P(Z=z) &= P(X+Y=z)\\ &= \sum_{(x,\ y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)/x+y=z} P(X=x\cap Y=y)\\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x\cap Y=z-x)\end{aligned}$$

Si X et Y sont *indépendantes*, alors :

$$P(Z=z)=\sum_{x\in X(\Omega)}[P(X=x)\ P(Y=z-x)]$$

4.3.2 Cas des variables aléatoires continues

Soient X et Y deux variables aléatoires continues, alors la variable aléatoire $Z=X+Y$ est aussi continue. Si le couple $(X,\ Y)$ admet la densité $f_{X,Y}$, alors la densité f de Z vérifie :

$$\forall z\in\mathbb{R},\ f(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,\ Y}(x,\ z-x)\ dx$$

Si X et Y sont *indépendantes* et admettent des densités f_X et f_Y, alors leur somme Z admet pour densité f telle que :

$$\begin{aligned}\forall z\in\mathbb{R},\ f(z) &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx}_{\text{produit de convolution de } f_X \text{ et } f_Y \text{ pris en } z}\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy\end{aligned}$$

Le *produit de convolution* peut être noté $f_X * f_Y$, et est commutatif.

Annexe A

Quelques formules utiles

$$
\begin{aligned}
\forall p \in [0,\, 1],\ \sum_{k=0}^{+\infty} p^k &= \frac{1}{1-p} \\
\sum_{k=1}^{+\infty} k\ p^{k-1} &= \frac{1}{(1-p)^2} \\
\sum_{k=2}^{+\infty} k\ (k-1)\ p^{k-2} &= \frac{2}{(1-p)^3} \\
\sum_{k=1}^{n} k &= \frac{n(n+1)}{2} \\
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} &= \exp^{\lambda}
\end{aligned}
$$

Annexe B

Quelques lois de probabilité usuelles

Soit X une variable aléatoire.

B.1 Lois discrètes

B.1.1 Loi uniforme discrète

$X = \mathcal{U}([1,\, n])$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\, k \leq n,\, P(X = k) = \frac{1}{n}$$

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{n^2 - 1}{12}$$

Voir 3.6.1 page 24.

B.1.2 Loi binomiale

$X = \mathcal{B}(n,\, p)$

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \leq n, \qquad P(X = k) = C_n^p \; p^k \; q^{n-k}$$

$$E(X) = np \qquad \text{et} \qquad V(X) = npq$$

X correspond au nombre de succès lors d'une succession de n épreuves de Bernouilli indépendantes, chacune ayant la probabilité de succès p (et d'échec $q = 1 - p$).

B.1.3 Loi géométrique

$X = \mathcal{G}(p)$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X = k) = (1-p)^{k-1}\, p$$

$$E(X) = \frac{1}{p} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Voir 3.6.2 page 24.

B.1.4 Loi de Poisson

$X = \mathcal{P}(\lambda)$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad P(X = k) = \exp^{-\lambda}\, \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda \qquad \text{et} \qquad V(X) = \lambda$$

B.1.5 Loi hypergéométrique

$X = \mathcal{H}(N,\, n,\, p)$

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \leq n, \qquad P(X = k) = \frac{C_{Np}^k\, C_{Nq}^{n-k}}{C_N^n}$$

$$E(X) = n\,p \qquad \text{et} \qquad V(X) = n\,p\,q\,\frac{N-n}{N-1}$$

Voir 3.6.3 page 25.

B.2 Lois continues

Soit f la fonction de densité de X.

B.2.1 Loi uniforme

$X = \mathsf{U}(a,\, b)$

$$\forall x \in [a,\, b], \qquad f(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Voir 3.7.1 page 26.

B.2.2 Loi exponentielle

$X = \mathcal{E}(\lambda)$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, \qquad f(x) = \lambda\ \exp^{-\lambda x}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Voir 3.7.2 page 27.

B.2.3 Loi normale

$X = \mathcal{N}(\mu,\, \sigma)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$E(X) = \mu \qquad \text{et} \qquad V(X) = \sigma^2$$

B.2.4 Loi du Chi-deux

$X = \chi^2_n$

Soient $X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n$ une suite de n variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,\, 1)$.

$$X = \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2$$

$$E(X) = n \qquad \text{et} \qquad V(X) = 2n$$